Projet informatique libre : compression de données numériques sonores

Introduction

L'intérêt de la compression de données

La quantité d'information numérique qui circule sur Internet, et d'autres réseaux, est de plus en plus importante. Cette expansion a été permise par l'avènement du haut débit d'une part, et de la fibre optique plus récemment, mais aussi par les progrès dans le domaine de la compression.

Dans ce projet, on va s'intéresser à la compression de données numériques représentant un signal sonore. On peut se demander l'intérêt, dans le sens où aujourd'hui, les connexions internet dans la plupart des villes de France sont suffisamment rapides pour transmettre en quelques secondes des fichiers musicaux non compressés. Il faut savoir qu'on peut étendre les résultats présentés à des données vidéo et cela justifie l'intérêt porté à l'amélioration des algorithmes utilisés puisque les quantités d'information mises en jeu sont alors importantes, même en regard des vitesses de connexion actuelles.

Objectif de notre projet

Nous souhaitons, à partir d'un enregistrement numérique non compressé (un .wav tout ce qu'il y a de plus banal), obtenir un autre fichier numérique, compressé, c’est-à-dire occupant moins de place en mémoire. Il faudra qu'on puisse ensuite décompresser ce fichier pour retrouver un .wav, n'ayant subi aucune modification audible par l'homme !

Plan de ce compte rendu

Dans un premier temps, on présentera les objets numériques sur lesquels on va travailler, et naturellement la façon dont ils sont obtenus. On expliquera aussi l'utilité du passage du domaine temporel au domaine fréquentiel. Si les notions d'échantillonnage et de quantification vous sont familières, ainsi que la structure d'un fichier .wav, vous pouvez sauter cette partie !

Dans un second temps, on étudiera la transformée de Fourier, et on présentera notre cheminement pour obtenir un algorithme de calcul le plus efficace possible. C'est dans cette partie qu'on traitera de la transformée de Fourier rapide tout d'abord dans une version récursive, puis dans une version itérative.

Ensuite, on passera à la phase d'implémentation, et d'optimisation de la vitesse de calcul par le code.

Enfin, on pourra alors tester l'efficacité de nos algorithmes, en les comparant à ceux de logiciels développés par des spécialistes, et on justifiera à posteriori la nécessité de passer dans le domaine fréquentiel par des comparatifs.

# La conversion analogique numérique

## Décrire le son

Un son n'est qu'une vibration mécanique de l'air ou de tout autre fluide compressible qui se propage sous forme d'ondes mécaniques. Un capteur (un microphone ou notre oreille) est capable de générer un signal électrique proportionnel à l'amplitude de ces ondes. Il existe deux manières de représenter ce signal (et donc le son) :

* La **représentation temporelle**, consiste à donner son amplitude en fonction du temps. On modélise ainsi le signal par une fonction mathématiquede (on prend comme départ de l'enregistrement) dans un intervalle d'amplitudes du signal que peut générer notre capteur avec . Cette représentation est la plus immédiate, c'est celle que l'on obtient directement en sortie d'un microphone.
* D'autre part, d'après la **théorie de Fourier** : on peut associer à tout signal T-périodique (dans ou ),sa série de Fourier

Et d'après le **théorème de Dirichlet**, si est suffisamment régulière (continue, dérivable et de dérivée continue par morceau), cette série converge vers :

où chaque terme de la deuxième somme est une harmonique de fréquence multiple de la fréquence fondamentale

Ainsi, on peut donner la **représentation fréquentielle** d'un signal, aussi appelé spectre, qui contient l'amplitude , la fréquence et la phase de chaque harmonique du signal. En effet, si est de durée finie, on le prolonge par périodicité sur, sinon, on peut le découper en intervalles (qu'on appellera frames) et prolonger ceux-ci par périodicité sur . On peut alors appliquer le théorème et décrire (sur chaque frame) par les coefficients. On modélise alors le signal (sur chaque frame) par une fonction mathématique.

On verra comment passer d'une représentation à l'autre dans la deuxième partie.

## Traiter le signal sonore numériquement

Pour pouvoir traiter le signal sonore numériquement, il faut d'abord le transformer en une suite de valeurs binaires (formées de 0 et de 1) qu'un ordinateur est capable de manipuler. C'est ce qu'on appelle la **conversion analogique numérique**. Elle répond à deux nécessités :

* cette **suite de valeurs doit être finie**, car chaque valeur occupe une place donnée en mémoire, et la capacité mémoire d'un ordinateur est finie.
* pour chaque valeur, on doit faire un **compromis entre précision et place mémoire occupée**. Si l'on veut stocker un entier par exemple, cela prend relativement peu de place : avec 16 bits on peut décrire n'importe quel entier naturel de à . Mais si l'on veut stocker un réel avec un très grand nombre de décimales, il convient de l'arrondir à un nombre de décimales raisonnable, qui dépend des capacités de notre machine.

Dans une première étape, on va donc discrétiser le signal , en prélevant sa valeur à intervalles réguliers généralement. Cette opération est appelée **l'échantillonnage.** On appelle **période d'échantillonnage** la durée qui sépare deux mesures, **fréquence d'échantillonnage** son inverse : et échantillon chaque valeur relevée.

Cela se traduit par l'obtention d'une représentation temporelle discrète, qu'on modélise mathématiquement par une suite où définie par : .

On peut se demander comment choisir la fréquence d'échantillonnage, en effet plus celle-ci est faible, moins notre suite possèdera de valeurs et moins elle occupera de place en mémoire. Mais si on relève trop peu d'échantillons, notre représentation discrète ne comportera pas toutes les subtilités du signal d'origine.

C'est ici qu'intervient le **théorème d'échantillonnage de Shannon** :

Si un signal a une fréquence maximale, alors sa représentation discrète, par des échantillons régulièrement espacés exige une fréquence d'échantillonnage telle que : .

Or, on considère que l'oreille humaine n'est capable de capter que des signaux sonores de fréquences comprises entre et , ou encore de pulsation comprises entre et

. On peut donc tronquer la représentation spectrale et considérer que

en prenant . En pratique, on utilise souvent (pour des raison historiques).

Dans une seconde étape, on va approximer chaque valeur de la suite par une valeur occupant peu de place en mémoire. Cette opération est appelée **quantification**. Dans une majorité des fichiers musicaux actuels, la valeur d'un échantillon est stockée sur 16 bits. Ces 16 bits permettent de décrire valeurs différentes. C'est pourquoi on divise l'intervalle décrit par nos échantillons en intervalles. On parle de quantification uniforme si ces intervalles sont de même longueur, c'est ainsi que l'on va précéder dans un premier temps. On appelle **pas de quantification** cette longueur, qui vaut .

On approxime alors chaque échantillon par une valeur de l'intervalle de quantification auquel il appartient (. On appelle **erreur de quantification** la quantité . On veut bien évidemment minimiser cette erreur, pour représenter l'échantillon de façon la plus précise possible. Pour cela, il parait logique, dans le cadre d'une quantification uniforme, d'utiliser la valeur centrée pour ainsi majorer l'erreur par . Puis on code sur bits, par la valeur binaire de .

Résumons toutes les étapes, en prenant l'exemple du signal suivant, échantillonné à une fréquence (le signal est une superposition de 3 sinusoïdes, avec ) et quantifié sur 3 bits.

## De la nécessité de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel

Sur ce graphique, on voit qu'à partir des échantillons, on serait bien en peine de reconstruire le signal originel, notamment sur la portion [5,9] où les oscillations ont été totalement gommées. Pourtant , donc le problème ne provient pas de l'échantillonnage : c'est le pas de quantification et donc l'erreur de quantification sur chaque échantillon qui sont trop importants. Pour réduire la place occupée par un fichier musical en mémoire on pourrait augmenter le pas de quantification, mais cet exemple montre que cette solution a ses limites. C'est une solution utilisé pour certains signaux sonores dont la qualité n'a pas besoin d'être aussi grande que celle d'une musique : ceux des conversations téléphoniques par exemple, qui peuvent être quantifiés sur 8 bits seulement.

Si l'oreille humaine détecte facilement la pauvre qualité d'un signal sur 8 bits, elle est en revanche beaucoup moins sensible à des légères modifications de tonalité, c’est-à-dire des coefficients . Une solution employée pour réduire la taille d'un enregistrement peut donc être de stocker sa représentation fréquentielle au lieu de sa représentation temporelle, que l'on pourra elle quantifier sur un nombre plus restreint de bits sans que cela soit perceptible. C'est ainsi que l'on va précéder dans la partie II. C'est une méthode de compression qualifiée de **psycho-acoustique**, car on exploite les caractéristiques de l'oreille humaine, pour supprimer des informations qui ne sont pas réellement traitées par celle-ci.

Dans la partie IV, on justifiera a posteriori ce choix, en comparant un signal obtenu par une augmentation directe du pas de quantification et un signal obtenu en passant au domaine fréquentiel et en quantifiant les coefficients .

# La Transformée de Fourier

## Passage du domaine temporel au domaine fréquentiel

La transformée de Fourier est une extension du développement en séries de Fourier pour les fonctions non périodiques. Pour obtenir la représentation fréquentielle d'un signal intégrable (pas forcément périodique), on calcul sa **transformée de Fourier** définie par :

Pour un signal suffisamment régulier (s'il est continu et sa transformée de Fourier est intégrable), on peut retrouver le signal d'origine par la **transformée de Fourier inverse** définie par :

Si l'on discrétise le signal en l'échantillonnant, il est représenté par une suite de échantillons telles que où est la période d'échantillonnage. On peut alors utiliser des **transformées discrètes**

Si on a respecté le critère de Shannon lors de l'échantillonnage, **la transformée de Fourier discrète (notée TFD par la suite) permet d'évaluer une représentation spectrale discrète, du signal discret en entrée, sur la fenêtre de temps fini .** C'est exactement ce que l'on souhaite : pour chaque frame (fenêtre de temps fini), on veut obtenir un spectre échantillonné pour pouvoir le quantifier (cf I.). On retrouve le signal discret d'origine en appliquant la TFD inverse à sa TFD.

Effectuons plusieurs remarques :

* En appliquant ces deux transformations à une suite de échantillons, on obtient toujours échantillons, rien ne sert de faire le calcul de par exemple puisque la transformée de Fourier discrète et son inverse son périodique de période . **Pour toute la suite on suppose que est une puissance de 2**. Donc toutes les fréquences comprises entre et sont les mêmes que celles comprises entre et
* Dans le cas d'un signal sonore, est réel, et on a alors la relation qui se vérifie rapidement : .
* Finalement, toute l'information spectrale est contenue entre les fréquences N/2 et N par exemple.

## L'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (FFT), version récursive

On peut voir directement par l'expression de la transformée de Fourier discrète que son calcul direct pour échantillons demande multiplication complexes. Cette transformée aurait des applications très limitée s'il n'existait pas d'algorithme plus rapide pour la calculer. C'est ici qu'intervient la Transformée de Fourier Rapide (notée par la suite FFT pour Fast Fourier Transform en anglais), algorithme fondamental de notre projet qui se base sur une stratégie "diviser pour régner" et que nous allons présenter maintenant :

● **Première étape** : Découper le problème en problème de plus petite taille. Remarquons qu'avec :

(Rappelons que comme notre signal est réel, dans notre cas, on ne calculera que les premiers échantillons et on obtiendra les suivants par symétrie)

Avec cette expression, on voit que chaque calcul d'une transformée de Fourier fera appel à multiplications complexes, éventuellement à des opérations de copies des coefficients (de cout proportionnel à N) ainsi qu'à la transformée de Fourier de ses coefficients pairs et à la transformée de Fourier de ses coefficients impairs, concernant toutes les deux échantillons. Notons le nombre de multiplications complexes pour calculer la transformée de Fourier de échantillons. On a donc la relation de récurrence :

● **Deuxième étape** : étudier le "cas trivial", problème de plus petite taille que l'on ne peut pas découper.

On a supposé que était une puissance de 2, soit tel que

Chaque appel récursif divise le nombre d'échantillon par 2, jusqu'à ce que l'on atteigne le calcul de la transformée de Fourier d'un échantillon. Avec les notations précédentes, on a alors : , il n'y a qu'à recopier le résultat ! Pour notre calcul on va donc prendre .

● **Calcul de la complexité de l'algorithme** :

or et d'où :

Cette estimation de complexité ne prend pas en compte les additions complexes, qui ont un temps calcul négligeable devant celui des les multiplications complexes.

Finalement, l'algorithme de la transformée de Fourier rapide permet un calcul en à la place d'un calcul en ! Cela représente un gain de temps considérable ! Supposons qu'on choisisse de travailler avec des paquets de échantillons et qu'on utilise une machine capable d'effectuer 1 million de de multiplications complexes par secondes. Alors qu'un calcul naïf prendrait , avec la FFT, on atteindra une vitesse de . C'est 100 fois plus rapide… et quand on sait que pour une musique échantillonnée à 44100 Hz, on a environ 43 paquet par secondes de musique, on comprend que les traitements que l'ont va effectuer grâce à la FFT serait impossible sans elle ! Il faudrait quasiment 3 heures pour traiter une musique de 4 minutes…

## L'algorithme de Transformée de Fourier Rapide (FFT), version itérative

On peut encore améliorer l'efficacité de notre algorithme. En effet, les appels récursifs ont un cout en temps de calcul, et surtout en occupation mémoire. On va donc déterminer comment effectuer notre FFT de façon itérative.

Si au fur et à mesure des appels récursifs dans le calcul précédent, on indice pour les coefficients impairs et pour les coefficients pairs, lorsque l'on arrive à un cas trivial, il est repéré par une suite de indices. Pour mieux visualiser ce qui va suivre, prenons un exemple avec , les appels récursifs sont résumés sur le schéma suivant

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 000 | 010 | 100 | 110 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 001 | 011 | 101 | 111 |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 011 | 111 |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 001 | 101 |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 000 | 100 |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 010 | 110 |

|  |
| --- |
|  |
| 000 |

|  |
| --- |
|  |
| 100 |

|  |
| --- |
|  |
| 010 |

|  |
| --- |
|  |
| 110 |

|  |
| --- |
|  |
| 001 |

|  |
| --- |
|  |
| 101 |

|  |
| --- |
|  |
| 011 |

|  |
| --- |
|  |
| 111 |

L'action de "recombinaison" qui clôt la version récursive de l'algorithme correspond en fait à un parcours, des feuilles vers la racine et niveau par niveau. Pour obtenir une version itérative, on peut donc tout d'abord réorganiser notre tableau contenant les coefficients dans l'ordre qui figure sur la dernière ligne du schéma précédent, puis recombiner les éléments 2 à 2 pour retrouver l'avant dernière ligne, puis de nouveau 2 à 2 pour retrouver la seconde ligne, et encore 2 à 2 pour calculer la transformée de Fourier souhaité, en première ligne.

On a noté sous chaque coefficient son indice codé en binaire, pour le tri des coefficients, on peut remarquer qu'il suffit d'inverser les chiffres de ce code. Exemple : le coefficient qui était à l'origine en position termine en position .

On voit qu'on utilisera les coefficients exponentiels pour qu'on a tout intérêt à enregistrer dans un tableau, initialisé lorsque l'on ouvre notre outil de compression !

Pour la transformée de Fourier discrète inverse, l'algorithme est le même, seuls les coefficients exponentiels sont à modifier en et il faut ajouter une division finale par .

# Implémentation de l'algorithme de FFT

## Lecture d'un fichier WAVE

La structure commune à tous les fichiers WAVE est la suivante. Le fichier démarre par un entête

Bibliographie

Cours d'analyse Signal en 2ème année "Modélisation Informatique et Communications" à l'INSA de Toulouse (Polycopié par Danièle FOURNIER, Violaine ROUSSIER-MICHON, Martin AIME et Fabien MONFREDA)

Voici l'implémentation réalisée de la FFT en ADA, qui reçoit en argument le tableau des coefficients , ainsi que celui des coefficients exponentiels et retourne le tableau des premiers coefficients (les autres sont obtenus par symétrie)